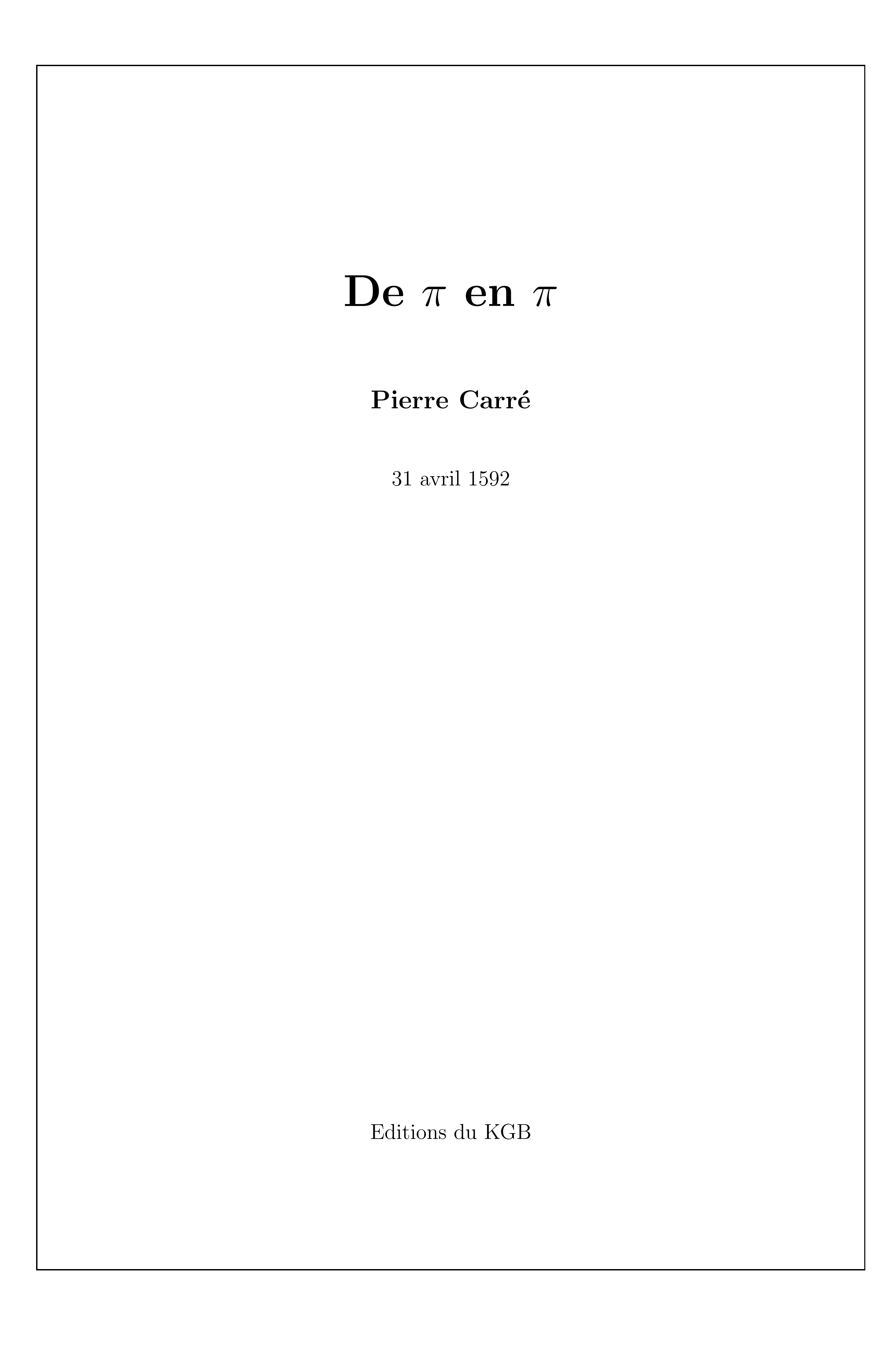


De π en π

Pierre Carré

31 avril 1592

Editions du KGB

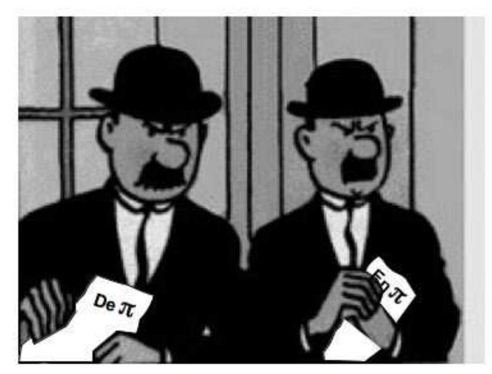
Editorial

Chers amis lecteurs fidèles et infidèles, c'est avec un bonheur et une joie incommensurables[1] *que nous vous proposons cette nouvelle œuvre de notre plus pur cru. Nous vous livrons dans ce livret tous les secrets du cercle ainsi que toutes les décimales de* π.

Avertissement : ceci n'est pas une fiction. Toute ressemblance des équations présentées ici avec les formules trigonométriques bien connues n'est pas fortuite. Les personnages comme Buffon, Plouffe et Machin ont vraiment existé pour de vrai. Et π *lui-même n'est pas imaginaire. Il est parfaitement réel.*








Archimède

Pierre Carré

Schpotzermann & Wienerschnitzel

Toute dernière mise à jour : 22 mai 2012

[1] Deux nombres sont dits *incommensurables* ssi leur rapport est irrationnel. Par exemple 1 et $\sqrt{2}$ ou encore 3 et π.

Nous vous proposons de commencer par une petite expérience. Montez dans le grenier de grand-papa et prenez un vieux 33 tours, la *Neuvième Symphonie* de Beethoven par exemple. Dépoussiérez-le. Prenez ensuite un mètre gradué et une ficelle. Pas trop courte mais pas trop longue non plus. Avec le mètre gradué, mesurez le rayon du disque, c'est-à-dire la distance du centre du petit trou central au bord du disque. Déduisez-en le diamètre : c'est facile, c'est 2 fois le rayon. Utilisez ensuite la ficelle pour mesurer le contour du disque et reportez le sur le mètre gradué. C'est le périmètre du disque. Sortez ensuite de votre poche une petite calculette et exécutez le rapport entre le périmètre du disque et son diamètre. Vous devriez obtenir approximativement 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127.



Vous pouvez ensuite recommencer avec un 45 tours de Kraftwerk[2]. Et vous constaterez que cela fonctionne aussi. Vous pouvez même tenter l'expérience avec un CD de Kate Bush[3], les roues de votre bicyclette ou les crèpes de bonne-maman, et ça marchera encore ! Eureka ! $\epsilon\upsilon\rho\eta\kappa\alpha$! Maintenant, calmons-nous. Cette expérience a déjà été réalisée quelques billions et une bonne dizaine de fois et ce bien avant que vous ne soyez nés.

Archimède de Syracuse, vers 250 avant J.C. (où J.C. n'est autre que Jésus-Christ) ne passa pas toute sa vie à regarder des objets plongés dans les liquides des bains publics. Il baignait aussi dans les vapeurs mathématiques. Dans son illustre traité *De la mesure du cercle*, il traita de la mesure du cercle. On y trouve non seulement une estimation du rapport entre périmètre et diamètre du cercle[4], mais aussi des propriétés remarquables, telles que le calcul de l'aire du cercle. C'est ce que nous allons attaquer d'entrée de jeu dès la page suivante du présent ouvrage.

Comme tout le monde, nous allons nommer le nombre 3,141592... à l'aide de la lettre π, qui est la première lettre de $\pi\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\tau\rho o\zeta$, *périmètre* grec. "$\pi$" se prononce "pi" (comme dans *pi*geons ou *pi*ssenlit) ou "trois-quatorze" ou encore "constante d'Archimède".

[2] Centralélectrique en français.

[3] Catherine Buisson en français.

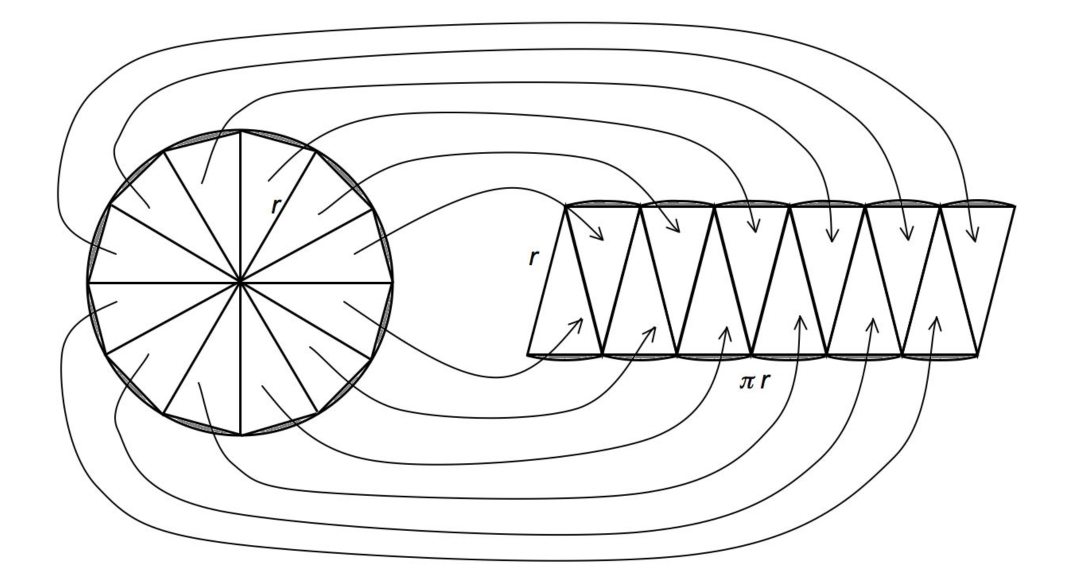
[4] On ne sait pas quels cercles il a mesurés, mais vraisemblablement pas des 33 tours et encore moins des DVD blue-ray.

Qui n'a pas déjà chantonné l'air du disque ? Nous allons vous dévoiler ici comment Archimède en personne a composé l'aire du disque avec un orchestre de triangles.

Ouverture (*Allegro ma non troppo*). Prenons un cercle[5] de rayon petit r. Inscrivons-y un polygone régulier lui-même découpé en plein de triangles isocèles semblables se rencontrant au centre du cercle, en prenant soin de grisonner en gris le bord du cercle non-inclus dans ces triangles.

Valse des triangles (*Moderato*). Réarrangeons ensuite ces triangles de manière à former un parallélogramme comme le suggère la figure ci-dessous, en alternant la position des triangles : un sur ses pieds, le suivant sur sa tête, etc. L'aire de ce parallélogramme est base fois hauteur (où "base" est la base du parallélogramme, "hauteur" est la hauteur du parallélogramme, et "fois" est l'opérateur commutatif de multiplication dans l'ensemble $\mathbb{R}$). La base vaut à peu près l'hémi-périmètre du cercle, c'est-à-dire $2\pi r/2 = \pi r$, et à défaut de hauteur, on voit que le côté oblique correspond au rayon du cercle, petit r. On s'aperçoit que + on prend de triangles, − la zone grisée en gris est grande, + la base du parallélogramme se rapproche de l'hémi-périmètre du cercle, − le côté oblique est oblique et + le parallélogramme ressemble à un rectangle.

Final (*Presto*). A l'infinie limite, ça colle à merveille. Donc, l'aire du disque est égale à l'aire du parallélogramme rectangle et, de fait, à $\pi r \times r = \pi r^2$. Applaudissements.

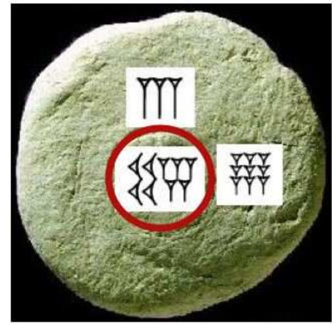
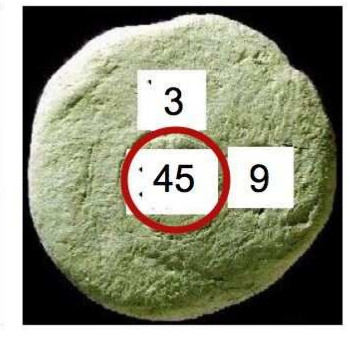


Bis (*sectrice*). Tout disque a une aire équivalente à celle du triangle rectangle pour lequel on a le rayon (du disque) égale à l'un des côtés adjacents à l'angle droit (du triangle) et le périmètre (du disque) égal à l'autre côté adjacent à l'angle droit (du triangle). Le vérifier est un jeu d'enfants. Nous le laissons donc aux enfants. Applaudissements.

[5]Nous abuserons volontiers de langage et utiliserons accidentellement *cercle*, *disque*, *rond* ou *lieu des points équidistants à un point donné.*

On trouve les premières estimations de la constante d'Archimède sur des tablettes babyloniennes datant d'environ 2000 ans avant A.S. (où A.S. n'est autre qu'Archimède de Syracuse). Les archéologues ont déniché des tablettes d'argile, où est gravée en signes cunéiformes cryptiques (décryptés) une floppée de calculs astronomiques et géométriques.

Nous en avons déterrée une, rien que pour vous. Il s'agit de la tablette YBC7302 (où *Y* n'est autre que Yale, *B* est bien entendu Babylonian, *C* est évidemment Collection, et 7302 est un multiple de 6).

Premièrement, décodons le code babylonique. Sur le panneau qui se trouve tout à fait à gauche, nous avons copié-collé la tablette, sur laquelle on distingue un cercle et des traces en forme de clou. Pour plus de clarification, sur le panneau qui n'est ni à gauche, ni à droite, nous avons simplement reproduit en clair les symboles cunéiformes ainsi que le cercle tels que gravés dans l'argile. Enfin, pour encore plus de clarification, sur le panneau qui n'est pas un des précédents, nous avons traduit les nombres en arabe[6].

Maintenant, tentons de comprendre ce que les babyloniens ont tenté de faire subir à cette tablette. On peut imaginer que le "3" qui colle au bord du cercle est le périmètre P du cercle. Imaginons qu'ils eurent voulu calculer l'aire A du disque à partir de ce périmètre. Ils devaient savoir sans aucun doute que l'aire était proportionnelle au périmètre du disque et, de fait, un calcul enfantin nous apprend que $A = P^2/(4\pi)$. Si les babyloniciens le savaient, il est naturel qu'ils aient commencé par calculer P^2, ce qui explique tout naturellement le "9" à droite du cercle et obtenu $A = 9/(4\pi)$.

Comment expliquer le "45" ? Il faut savoir que les babylonieux comptaient en base 60. En faisant jouer une fois de plus notre imagination, on peut supposer que "45" est en fait 45/60, une estimation de l'aire du disque. En comparant cette fraction avec $9/(4\pi)$, on en déduit que les babylonistes avaient déduit que $\pi = 3$.

Dans d'autres tablettes, on trouve des tables d'aires pour divers polygones réguliers ainsi qu'une estimation de π en comparant un cercle avec un hexagone y inscrit et qui a livré une valeur de π égale à $3+1/8 = 25/8 = 3{,}125$. Archimède a redécouvert cette méthode. Nous y reviendrons plus tard, mais avant, partons pour un petit voyage en Egypte.

[6] Pour décoder les signes cunéiformes sans tomber dans le panneau, nous vous invitons à consulter l'ouvrage remarquable que nous allons écrire prochainement.

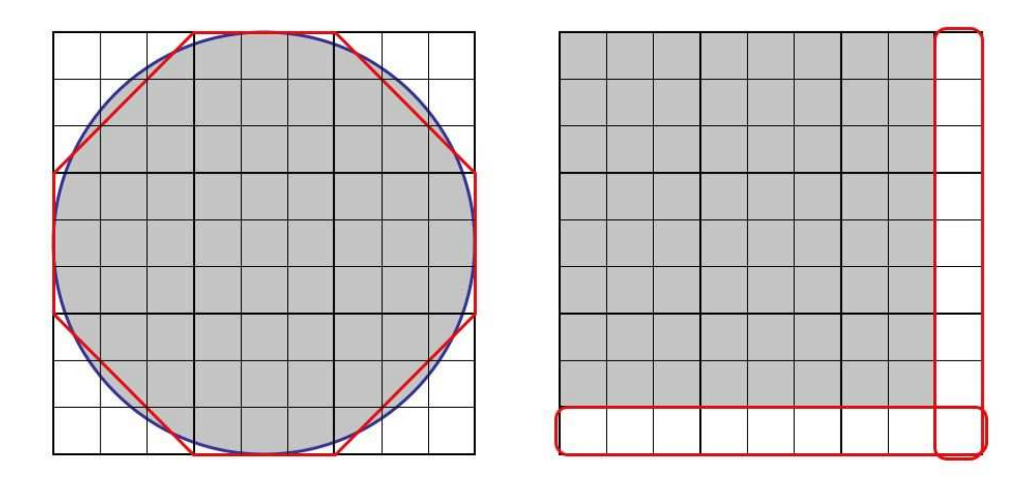
Vers -1650, les Egyptiens aussi s'étaient penchés sur π. Le fameux papyrus de Rhind contient le texte, recopié vers l'an 1650 avant notre R par le scribe égyptien Ahmès, d'un manuel de problèmes mathématiques encore plus ancien (qui lui même pourrait bien avoir été rerecopié d'un manuel encore plus ancien et ainsi de suite jusqu'au manuel original). On y trouve 87 problèmes plus énigmathématiques les uns que les autres.

Intéressons-nous au problème 16... non, plutôt au problème 50. Il s'énonce grosso-modo

> *Comment trouver l'aire d'un champ rond de diamètre 9 khet ? Soustraire 1/9 du diamètre, c'est-à-dire 1. Il reste 8. Multiplier 8 par 8, ce qui donne 64. Et donc l'aire du champ est 64 setjat*[7].

C'est tout. Le papyrus Rhindien ne fournit pas de démonstration, pas de dessin... ah si, dans le problème 48, on trouve une figure qui représente plus ou moins un octogone inscrit dans un carré. Sans commentaire. Sur cette base, les archéomathématiciens ont avancé l'hypothèse qui fera l'objet du paragraphe suivant.

Les Egyptiens auraient eu l'ingénieuse idée d'enfermer un beau cercle de diamètre 9 dans un magnifique quadrillage de 9 carrés de côté. Ils se seraient alors aperçu avec stupéfaction que le cercle collait pas mal du tout avec l'octogone tel que représenté dans la figure ci-dessous. Ils auraient ensuite constaté avec bonheur que les 4 triangles hors octogone couvrent une aire de 18 petits carrés qui peuvent se réarranger le long de 2 bords du grand carré (avec un carré un peu redondant). Ils ont donc construit avec succès un carré d'à peu près même aire que le cercle et donc résolu approximativement la quadrature du cercle.



Et π dans tout ca ? On ne sait pas si les Egyptiens avaient conscience de l'existence de π (qui n'apparait nulle part dans ces calculs), mais nous pouvons déduire de leur construction une approximation de π. D'après leur quadrature du cercle, on a $\pi(9/2)^2 = 64$, d'où $\pi = 256/81 = 3,16049$, ce qui n'est pas trop mal.

[7]Le lecteur perspicace aura compris qu'un setjat n'est rien d'autre qu'un khet au carré.

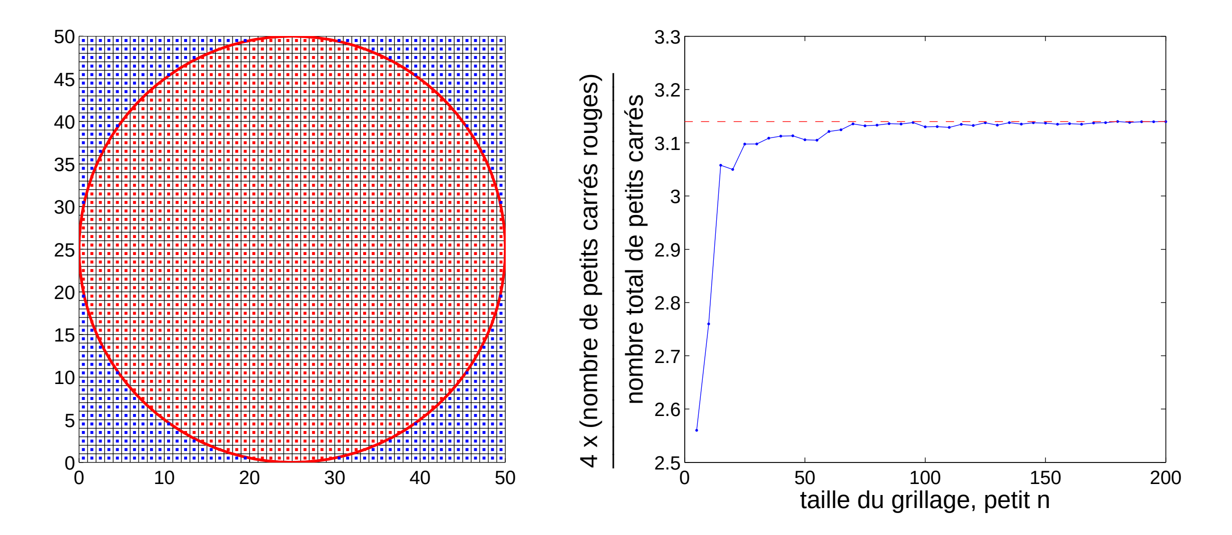
Une autre estimation de π peut être faite en comptant des petits carrés. L'idée est excessivement simplissime. Prenez un grand carré et grillez-le en n x n sous-carrés. Comptez ensuite le nombre de sous-carrés qui se trouvent encerclés dans le cercle inscrit dans le grand carré. Un carré est considéré encerclé si son centre est dans ou sur le cercle. Pour bien les repérer, on va colorier ces sous-carrés encerclés en rouge et on va les appeler "carrés rouges".

Puisqu'on sait que l'aire du disque est $A_{disque} = \pi r^2$ et que l'aire du grand carré est $A_{grandcarre} = (2r)^2$, on a :

$$\frac{A_{disque}}{A_{grandcarre}} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4} \tag{1}$$

Comme l'aire est proportionnelle au nombre de carrés, on trouve que :

$$\pi \approx \frac{4 \times \text{nombre de carrés rouges}}{\text{nombre de carrés total}} = \frac{4 \times \text{nombre de carrés rouges}}{n^2} \tag{2}$$



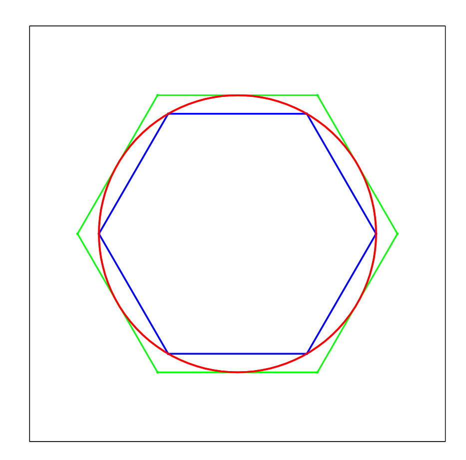
La précision obtenue dépend bien-sûr du grillage choisi. Plus n est grand, plus l'estimation de π sera précise. Pour $n = 10$, on estime π à 3,2, pour $n = 50$, on évalue π à 3,1616, pour $n = 100$, on cerne π à 3,144 et pour $n = 200$, on approxime π à 3,1428.

Cette méthode peut aisément être appliquée à la main avec un compas et du papier millimètré. Elle présente cependant un gros risque, celui de s'endormir lors du comptage des petits carrés rouges. C'est pourquoi il est recommandé de le faire faire par l'ordinateur[8].

Il faut souligner qu'il existe des méthodes plus chicaneuses qui consistent à redécouper les sous-carrés traversés par le cercle en sous-sous-carrés, mais nous avons préféré ici ne pas nous couper les cheveux en 4.

[8]Machine qui permet, entre autres, de compter des milliers de carrés plus vite que son ombre.

Dans son *De la mesure du cercle*, Archimède propose une méthode polygonique qui sera encore exploitée pendant plusieurs siècles après sa mort. Son idée repose sur l'observation indiscutable que tout polygone inscrit au cercle a un périmètre plus petit que le cercle tandis que tout polygone circonscrit au cercle a un périmètre plus grand que le cercle.

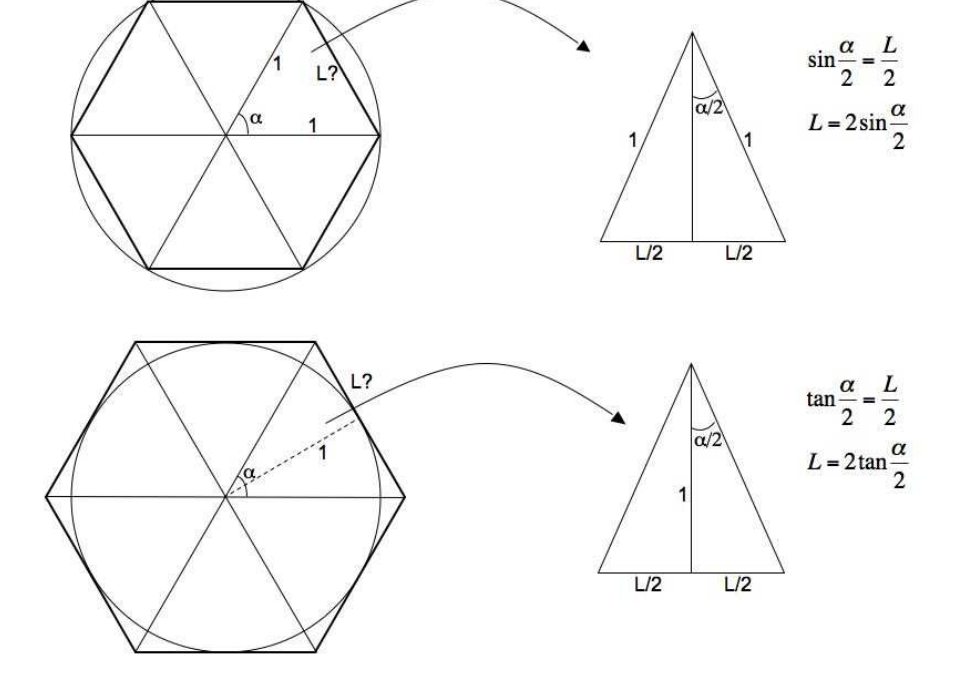


Calculer les périmètres de tels polygones nous livre ainsi des bornes inférieures et supérieures de π. On notera aussi que plus le polygone (inscrit ou circonscrit, peu importe) a de côtés, plus son périmètre se rapproche de celui du cercle.

Prenons un cercle de rayon 1, et donc de périmètre 2π. Voyons ce que ça donne avec des hexagones (gones à 6 côtés). Considérons d'abord l'hexagone inscrit au cercle. Il est composé de 6 triangles équilatéraux de côté 1. Le périmètre de cet hexagone est donc égal à $6 \times 1 = 6$. Considérons ensuite l'hexagone circonscrit au cercle. Il est composé de 6 triangles équilatéraux de hauteur 1. On peut vérifier (par exemple avec Pythagore) que la base de ce triangle est égale à $2/\sqrt{3}$ et donc le périmètre de cet hexagone vaut $6 \times 2/\sqrt{3}$. On en déduit que $6 < 2\pi < 12/\sqrt{3}$ ou encore $3 < \pi < 6/\sqrt{3}$ c'est-à-dire $3 < \pi < 3,464...$

Avec quelques formules magiques de trigono en tête, on peut facilement généraliser ce calcul au cas de ngones (gones à n côtés). Le ngone inscrit se subdivise en n triangles isocèles dont 2 côtés valent 1 et l'angle entre ces 2 côtés vaut $\alpha = 2\pi/n$. Par Pythagore on trouve que le 3ème côté est égal à $2\sin(\alpha/2) = 2\sin(\pi/n)$ et donc le périmètre de ce ngone est $2n\sin(\pi/n)$. Par ailleurs, le ngone circonscrit se subdivise en n triangles isocèles dont la hauteur vaut 1 et l'angle entre ces 2 côtés vaut également $\alpha = 2\pi/n$. On trouve alors que le 3ème côté est égal à $2\tan(\alpha/2) = 2\tan(\pi/n)$ et donc le périmètre de ce ngone est $2n\tan(\pi/n)$. On définit alors les demi-périmètres des ngones inscrit et circonscrit par S_n et T_n :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S_n & = & n \sin \dfrac{\pi}{n} \\ \\ T_n & = & n \tan \dfrac{\pi}{n} \end{array} \right. \tag{3}$$



et on a donc coincé π dans l'étau :

$$S_n < \pi < T_n \tag{4}$$

En faisant tendre n vers l'infini, les ngones sont de plus en plus proches du cercle et S_n et T_n vont se resserer autour de π. A l'infinie limite, on a :

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{\pi}{n} = \pi = \lim_{n\to\infty} n \tan\frac{\pi}{n} \tag{5}$$

C'est joli, mais on se mord la queue : on cherche π et on se retrouve avec π dans les équations ! Et c'est d'un coup de baguette trigonométrique qu'on va faire disparaître les π, en prouvant les formules suivantes qui vont nous permettre de calculer les demi-périmètres des 2ngones en fonction de ceux des ngones :

$$\left\{\begin{array}{rcl} S_{2n} & = & \sqrt{S_n T_{2n}} \\ T_{2n} & = & \dfrac{2S_nT_n}{S_n+T_n} \end{array}\right. \tag{6}$$

Rassurez-vous, ces formules ne sont pas sorties d'un chapeau magique tel un lapin blanc. Elles peuvent se démontrer. Commençons par la première équation :

$$\begin{aligned} S_nT_{2n} = (n\sin\frac{\pi}{n})(2n\tan\frac{\pi}{2n}) &= 2n^2\sin\frac{\pi}{n}\tan\frac{\pi}{2n} \\ &= 2n^2(2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n})\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\cos\frac{\pi}{2n}} \\ &= 4n^2\sin^2\frac{\pi}{2n} \end{aligned} \tag{7}$$

En enracinant l'équation, on tombe sur

$$\sqrt{S_n T_{2n}} = \sqrt{4n^2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}} = 2n \sin \frac{\pi}{2n} = S_{2n} \tag{8}$$

Attaquons maintenant la deuxième équation de (6) :

$$\frac{2S_n T_n}{S_n + T_n} = \frac{2n^2 \sin \frac{\pi}{n} \tan \frac{\pi}{n}}{n \sin \frac{\pi}{n} + n \tan \frac{\pi}{n}} \tag{9}$$

En divisant par n et en multipliant par $\cos \frac{\pi}{n}$ à tous les étages, on trouve

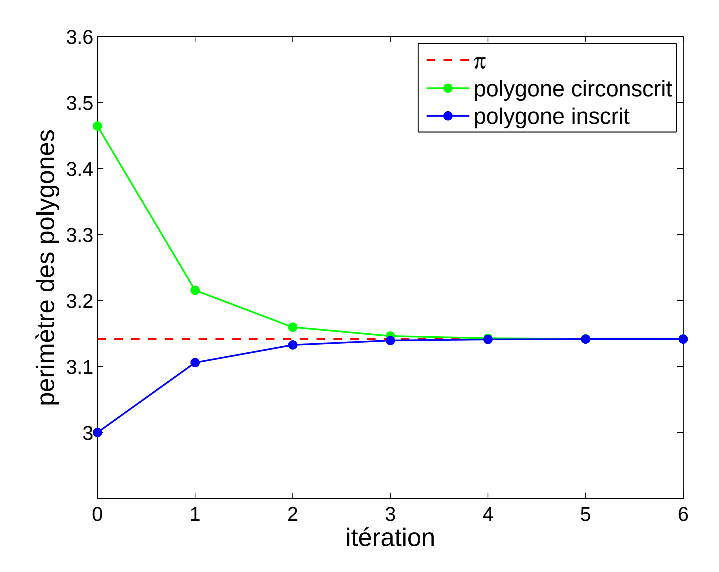
$$\begin{aligned}
\frac{2S_n T_n}{S_n + T_n} &= \frac{2n \sin^2 \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} + \sin \frac{\pi}{n}} \\
&= \frac{2n \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} + 1} \\
&= \frac{4n \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{2n}}{2 \cos^2 \frac{\pi}{2n}} \\
&= 2n \tan \frac{\pi}{2n} \\
&= T_{2n}
\end{aligned} \tag{10}$$

Et le tour de passe-passe est joué. On peut maintenant passer à l'application pratique de ces formules en calculant S_n et T_n en faisant doubler la valeur de n à chaque étape.

Partons de notre hexagone pour lequel on a déjà calculé $S_6 = 3$ et $T_6 = 3,464....$ Le joli petit tableau contient les valeurs successives des esses et des thés. Après 10 itérations, on a empolygoné π avec des trichilioheptacontakaidigones (3072gones) et encadré π à la 5ème décimale.

itération	n	S_n	T_n	commentaires
1	6	3,000000000000	3,464101615138	ça commence bien par 3
2	12	3,105828541230	3,215390309173	on se rapproche
3	24	3,132628613281	3,159659942098	une décimale correcte
4	48	3,139350203047	3,146086215131	ça progresse...
5	96	3,141031950891	3,142714599645	déjà deux décimales correctes
6	192	3,141452472285	3,141873049980	et de trois !
7	384	3,141557607912	3,141662747057	de plus en plus près...
8	768	3,141583892148	3,141610176605	S_8 fait mieux que T_8
9	1536	3,141590463228	3,141597034322	voilà la 5ème
10	3072	3,141592105999	3,141593748771	sans commentaire

Nous pouvons admirer la convergence polygonique de π sur la magnifique figure copiée-collée ci-dessous :



Enfin, notons qu'Archimède s'est limité aux ennéacontakaihexagones (96gones) et a montré que

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

Le lecteur chicaneur aura déjà sorti sa calculette et observé que ces fractions ne donnent pas exactement les valeurs obtenues ci-dessus. On pardonnera volontiers à Archimède ces petites approximations de calculs, qui ont été faits à la main ! Que le lecteur qui fait mieux lui jette la première pierre (carrée) !



$$\boxed{\pi = 4 \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} = \dfrac{4}{1} - \dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{5} - \dfrac{4}{7} + \dfrac{4}{9} - ...}$$

La légende raconte que Madhava[9] a trouvé les numérateurs, Gregory, les dénominateurs, et que Leibnitz a tracé les barres de fraction et les signes. Entre nous, nous appellerons cette équation la Greg's formule.

Pour dériver la Greg's formule, souvenons-nous que Taylor, fan de séries, a montré que

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ... \tag{11}$$

Intégrons le membre de gauche tout autant que le membre de droite, de 0 à t :

$$\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - ... \tag{12}$$

En particulier, si $t = 1$, il surgit :

$$\arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ... \tag{13}$$

Mais on sait aussi que l'angle dont la tangente vaut 1 n'est autre que $\pi/4$ (à kapi près) :

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} \tag{14}$$

et du coup :

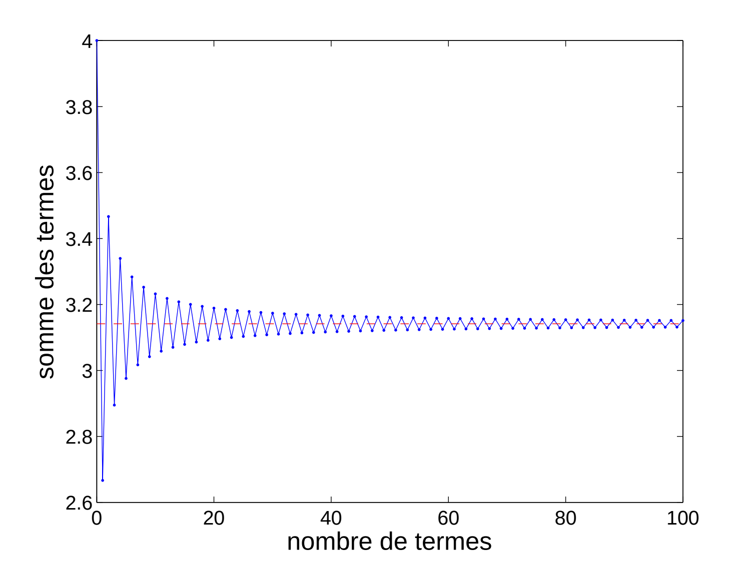
$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - ... \tag{15}$$

Et pour faire plus chic, on peut compacter cette série en

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \tag{16}$$

Sur le graphe gravé ci-dessous nous illustrons la convergence de (16). Chaque terme supplémentaire nous rapproche un peu plus de π (qui est pointillé en rouge). On note aussi une alternance de valeurs plus grandes que π et de valeurs plus petites que π. C'est à cause du $(-1)^k$.

[9] Plus exactement Madhava de Sangamagrama, qui, comme son nom l'indique, contient beaucoup de "a" dans son nom.



Cette série converge très lentement. Avec 100 termes, on trouve 3.1514 et après 1000 termes, on trouve 3.1425. Seules 2 décimales sont OK. C'est pas terrible. Heureusement pour les impatients, des variantes ont été proposées. Ainsi, une autre contribution de Madhava est :

$$\pi = \sqrt{12}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1/3)^k}{2k+1} = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + ...\right) \tag{17}$$

Vers -1650 avant A.S., avec (17) et sans ordinateur, Madhava a réussi à se rapprocher de π avec 11 décimales correctes !

Le tableau ci-dessous permet de comparer les performances des Greg's & Madhava's formules. On voit visiblement que c'est Madhava qui remporte haut la main la course à π. Chapeau à l'indien !

itération	Greg's formule (16)	Madhava's formule (17)	Commentaires
1	4,0000000000000	3,4641016151378	plus grand que π
2	2,6666666666667	3,0792014356780	plus petit que π
3	3,4666666666667	3,1561814715700	plus grand que π
4	2,8952380952381	3,1378528915957	plus petit que π
5	3,3396825396825	3,1426047456631	plus grand que π
6	2,9760461760462	3,1413087854629	plus petit que π
7	3,2837384837385	3,1416743126988	plus grand que π
8	3,0170718170718	3,1415687159418	plus petit que π
9	3,2523659347189	3,1415997738115	plus grand que π
10	3,0418396189294	3,1415905109381	plus petit que π

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}}$$

Comment démontrer ce machin, vous dites-vous ? Eh bien, on vous le donne en 1000. Nous allons calculer $\tan 4x$ en fonction de $\tan x$. Tout d'abord, il faut se rappeler que

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \tag{18}$$

Par (18), si $a = b = x$, on a

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \tag{19}$$

Et repar (18), on rea

$$\begin{aligned} \tan 4x = \tan 2(2x) &= \frac{2\tan 2x}{1 - \tan^2 2x} \\ &= \frac{2\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}{1 - \dfrac{4\tan^2 x}{(1-\tan^2 x)^2}} \\ &= \frac{4\tan x(1-\tan^2 x)}{1 - 6\tan^2 x + \tan^4 x} \end{aligned} \tag{20}$$

Considérons maintenant l'ixe suivant :

$$x = \arctan\frac{1}{5} \tag{21}$$

et faisons-lui subir (20) :

$$\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right) = \frac{4\frac{1}{5}(1 - \frac{1}{25})}{1 - \frac{6}{25} + \frac{1}{625}} = \frac{120}{119} \tag{22}$$

Par ailleurs, on se souvient que :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \tag{23}$$

On pose maintenant $a = 4\arctan\frac{1}{5}$ et $b = \arctan\frac{1}{239}$ et on vérifie que

$$\tan(4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}) = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119}\frac{1}{239}} = 1 \tag{24}$$

Oui, oui, aussi étonnant que cela puisse paraître, ce machin fait tout juste 1 ! Si vous nous croyez pas, refaites-le pour voir.

Si la tan vaut 1, c'est que son argument vaut $\pi/4$ et on en déduit ce machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \tag{25}$$

Le machin est fini. Et qu'est-ce qu'on fait avec çà ? Hé bien on ressort (12) :

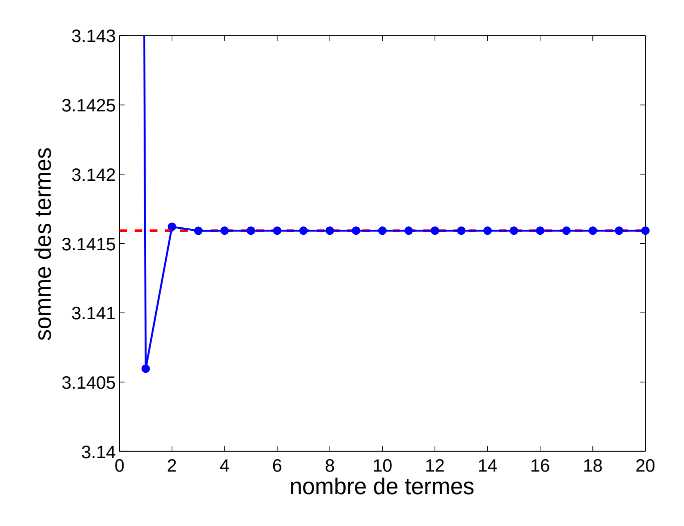
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - ... \tag{26}$$

et on n'attend pas pour développer les 2 arctan :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = & \quad 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\times 5^3} + \frac{1}{5\times 5^5} - \frac{1}{7\times 5^7} + \frac{1}{9\times 5^9} + ...\right) \\ & - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\times 239^3} + \frac{1}{5\times 239^5} - \frac{1}{7\times 239^7} + \frac{1}{9\times 239^9} + ...\right) \end{aligned} \tag{27}$$

Beau coup ! Cette double série converge beaucoup plus raπdemment que celle de Greg. Imaginez-vous qu'en 1706, John Machin a réussi à déterminer 100 décimales de π sans machine ! Beaucoup plus tard, avec l'ordinateur, cette série permettra de calculer des centaines et des centaines et des centaines de décimales beaucoup plus vite.

Sur le ravissant graphe planté ci-dessous, on voit que les points bleus (obtenus avec la série de Machin) collent la ligne rouge (π). La superrapide convergence de la série saute aux yeux.



De fascinantes relations entre π et les nombres de Fibonacci peuvent être soulevées. Reconnaissez-vous la série de nombres 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, etc ? Ce sont les fameux nombres de Fibonacci définis récurremment par $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ (avec $F_1 = 0$, $F_2 = 1$ et $i > 2$).

Avec un peu d'astuces, on peut démontrer la formule suivante :

$$\arctan \frac{1}{F_{2n}} = \arctan \frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan \frac{1}{F_{2n+2}} \tag{28}$$

Appliquons-la en cascade pour voir déferler les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \arctan 1 \\
&= \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} \\
&= \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} \\
&= \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{13} + \arctan \frac{1}{21} \\
&= \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{13} + \arctan \frac{1}{34} + \arctan \frac{1}{55} \\
&= \ldots
\end{aligned} \tag{29}$$

On peut compresser (29) en :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \arctan \left(\frac{1}{F_{2k+1}} \right) \tag{30}$$

On peut aussi aisément montrer en 89 pages de calculs que :

$$\frac{\pi}{4} = \sqrt{5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k F_{2k+1}}{(2k+1)\phi^{2(2k+1)}} \tag{31}$$

où $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le fameux nombre doré[10].

Dans la vie il faut parfois faire des choix. Certains choix sont difficiles et peuvent avoir des conséquences dramatiques. On se souvient tous de bonne-maman qui offre 2 cravates à son petit-fils pour la réussite de sa licence en mathématiques, une cravate avec des cercles cyan sur fond jaune et l'autre avec des polygones verts sur fond magenta. Petit-fils remercie bonne-maman et choisit de porter la cravate cerclée. Et là, bonne-maman lui dit “tu n'aimes pas la cravate polygonale ?”. Tout ça pour dire que nous avons fait le choix de ne pas démontrer (31) au risque d'en décevoir quelques-uns.

[10] A ce propos nous vous recommandons vivement l'œuvre mirifique de Schpotzermann & Wienerschnitzel, *Du nombre d'or*.

Formule de Plouffe

La formule de Plouffe (1995), aussi appelée BBP (Bailey-Borwein-Plouffe) est une somme infinie de sommes de 4 fractions :

$$\boxed{\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)}$$

Au risque de décevoir bonne-maman, nous choisissons cette fois-ci[11] de démontrer la BBP. Et quand faut y aller, faut y aller. Jetons nous à l'$H_2 0$. Plouf !

Tout d'abord, montrons que

$$\frac{1}{16^k(8k+n)} = \sqrt{2}^n \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{n-1+8k} dx \tag{32}$$

En effet, voyons ça de plus près[12] en démarrant adroitement par le membre de droite :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}^n \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{n-1+8k} dx &= \sqrt{2}^n \left[\frac{x^{n+8k}}{8k+n}\right]_0^{1/\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2}^n \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+8k}}{8k+n} \\
&= \sqrt{2}^n \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8k}}{8k+n} \\
&= \frac{1}{2^{4k}(8k+n)} \\
&= \frac{1}{16^k(8k+n)}
\end{aligned} \tag{33}$$

Sommons infiniment les termes de (32) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+n)} = \sqrt{2}^n \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{n-1+8k} dx \tag{34}$$

[11] ne pas confondre avec 42.

[12] à l'aide d'une loupe ou d'un téléscope.

Cette $\sum$ d' $\int$ peut s'expliciter :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{1/\sqrt{2}} x^{n-1+8k}dx &= \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{n-1}dx + \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{n-1+8}dx + \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{n-1+16}dx + ... \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} (x^{n-1} + x^{n-1+8} + x^{n-1+16} + ...)dx \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{n-1}(1 + x^8 + x^{16} + ...)dx \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{n-1}}{1-x^8}dx \qquad (35)\end{aligned}$$

où, pour la dernière étape nous avons utilisé le développement en série de Taylor de 1 sur (1 plus x), ainsi donc :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k(8k+n)} = \sqrt{2}^n\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x^{n-1}}{1-x^8}dx \qquad (36)$$

On peut maintenant faire agir (36) sur les 4 termes de la formule de Plouffe (après tout, c'est ceux-là qui nous intéressent) :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1}-\frac{2}{8k+4}-\frac{1}{8k+5}-\frac{1}{8k+6}\right) \\ =\ & 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k(8k+1)} - 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k(8k+4)} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k(8k+5)} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k(8k+6)} \\ =\ & 4\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{1-x^8}dx - 2\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}^4x^3}{1-x^8}dx - \int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}^5x^4}{1-x^8}dx - \int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}^6x^5}{1-x^8}dx \\ =\ & \int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}dx \qquad (37)\end{aligned}$$

On procède maintenant au judicieux petit changement de variable suivant :

$$y = \sqrt{2}x \qquad (38)$$

On a alors $dx = dy/\sqrt{2}$ et les bornes se bornent à $y = 0$ ($\Leftrightarrow x = 0$) et $y = 1$ ($\Leftrightarrow x = 1/\sqrt{2}$), et, miracle, les $\sqrt{2}$ se volatilisent :

$$\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}dx = 16\int_0^1\frac{y^5+y^4+2y^3-4}{y^8-16}dy \qquad (39)$$

Exécutons un petit réarrangement algébrique du dénominateur :

$$\begin{aligned}y^8-16 &= (y^4-4)(y^4+4) \\ &= (y^2-2)(y^2+2)(y^2-2y+2)(y^2+2y+2)\end{aligned} \qquad (40)$$

et du numérateur :

$$
\begin{aligned}
y^5 + y^4 + 2y^3 - 4 &= (y-1)(y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 4y + 4) \\
&= (y-1)(y^2+2)(y^2+2y+2) \qquad (41)
\end{aligned}
$$

En réassociant le numérateur et le dénominateur, l'intégrale (39) devient, après décomplexification :

$$
16 \int_0^1 \frac{y-1}{(y^2-2)(y^2-2y+2)} dy \qquad (42)
$$

Cette dernière intégrale n'est pas piquée des vers. La fraction peut se fractionner en :

$$
\frac{y-1}{(y^2-2)(y^2-2y+2)} = \frac{2-y}{4(y^2-2y+2)} + \frac{y}{4(y^2-2)} \qquad (43)
$$

et la première fraction du terme de droite de (43) peut encore se métamorphoser en

$$
\begin{aligned}
\frac{2-y}{y^2-2y+2} &= \frac{1-y}{y^2-2y+2} + \frac{1}{1+y^2-2y+1} \\
&= \frac{1-y}{y^2-2y+2} + \frac{1}{1+(y-1)^2} \qquad (44)
\end{aligned}
$$

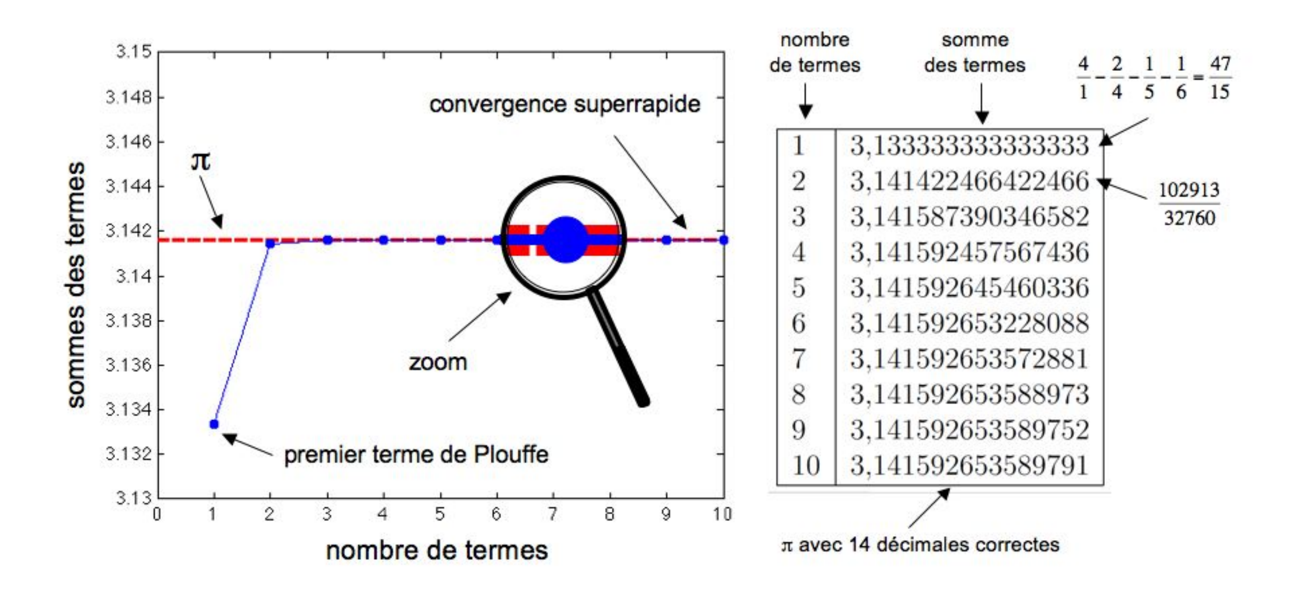
où nous avons eu recours à l'égalité bien connue $1 + 1 = 2$.

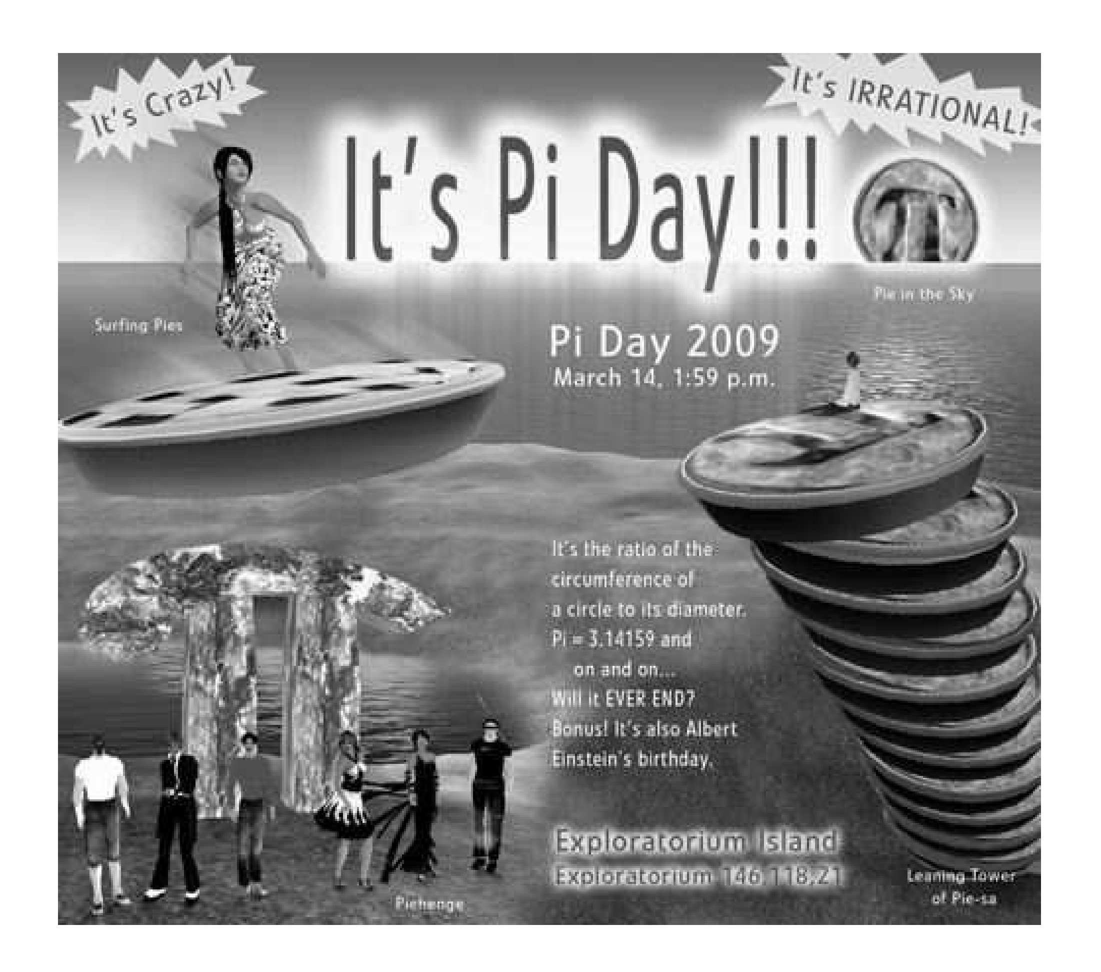
Aprés ces fractionnages épuisants, revenons à nos moutons[13] :

$$
\begin{aligned}
& 16 \int_0^1 \frac{y-1}{(y^2-2)(y^2-2y+2)} dy \\
= \; & 4 \int_0^1 \frac{2-y}{y^2-2y+2} dy + 4 \int_0^1 \frac{y}{y^2-2} dy \text{ par (43)} \\
= \; & 4 \int_0^1 \frac{1-y}{y^2-2y+2} dy + 4 \int_0^1 \frac{1}{1+(y-1)^2} dy + 2 \int_0^1 \frac{2y}{y^2-2} dy \text{ par (44)} \\
= \; & -2 \left[\ln |y^2-2y+2| \right]_0^1 + 4 [\arctan(y-1)]_0^1 + 2 \left[\ln |y^2-2| \right]_0^1 \\
= \; & -2(\ln|1-2+2| - \ln|2|) + 4(\arctan(0) - \arctan(-1)) + 2(\ln|1-2| - \ln|-2|) \\
= \; & -2\ln 1 + 2\ln 2 + 0 - 4\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\ln 1 - 2\ln 2 \\
= \; & \pi \qquad (45)
\end{aligned}
$$

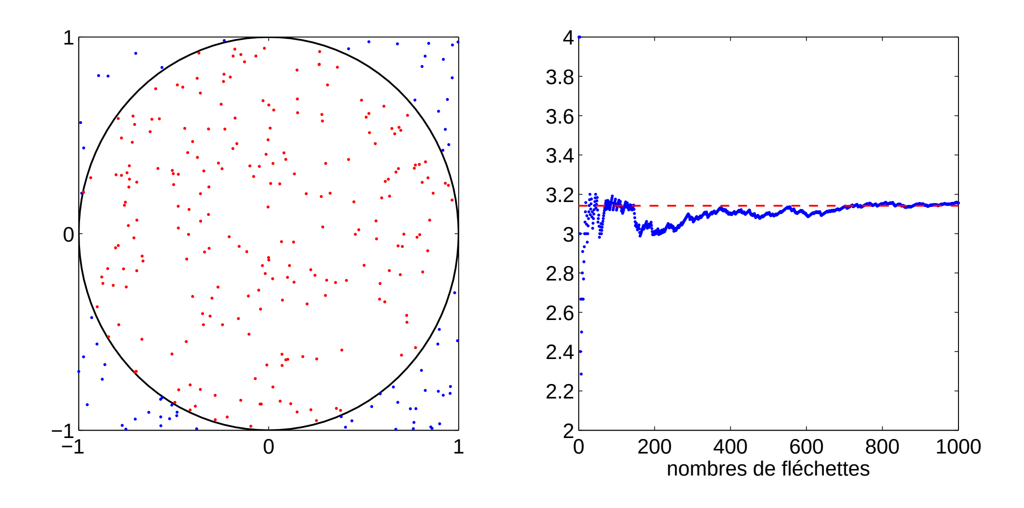
La remarquabilité de cette formule réside dans le fait qu'elle peut être triturée de manière à pouvoir calculer la ènième décimale de π sans calculer les ènes-moins-unièmes décimales précédentes. Nous vous offrirons la démonstration à la Saint-Nicolas si vous êtes sage.

[13] Dans son acception traditionnelle, un mouton est un mammifère herbivore à quatre pattes et au pelage bouclé qui fait bêêêêê bêêêêê. Dans le présent contexte, "mouton" se réfère à l'intégrale (42).

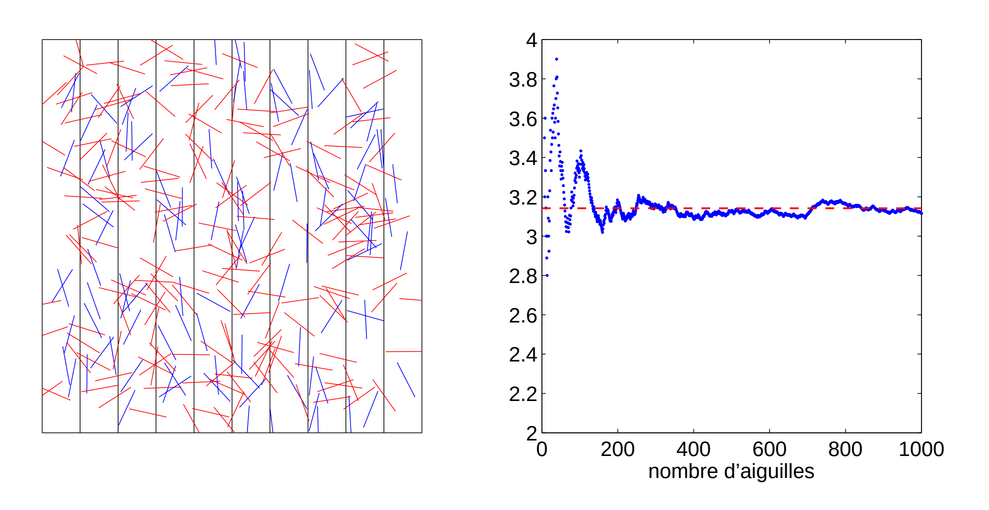

sommes des termes
nombre de termes
convergence superrapide
π
zoom
premier terme de Plouffe
nombre de termes
somme des termes
$\frac{4}{1}-\frac{2}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{47}{15}$
$\frac{102913}{32760}$
1 3,133333333333333
2 3,141422466422466
3 3,141587390346582
4 3,141592457567436
5 3,141592645460336
6 3,141592653228088
7 3,141592653572881
8 3,141592653588973
9 3,141592653589752
10 3,141592653589791
π avec 14 décimales correctes


It's Crazy!
It's IRRATIONAL!
It's Pi Day!!!
Surfing Pies
Pie in the Sky
Pi Day 2009
March 14, 1:59 p.m.
It's the ratio of the circumference of a circle to its diameter. Pi = 3.14159 and on and on... Will it EVER END? Bonus! It's also Albert Einstein's birthday.
Exploratorium Island
Exploratorium 146 118 21
Piehenge
Leaning Tower of Pie-sa

On peut trouver π en jouant au vogelπk. Pour cela il vous faut une cible (de forme carrée dans laquelle on coince un rond) et des fléchettes. Lancez les fléchettes dans la cible. Comme vous ne jouez pas mal, on supposera que toutes les fléchettes se plantent dans le carré, de manière uniformément uniforme. La proportion de fléchettes qui se planteront à l'intérieur du cercle sera égale au rapport entre l'aire du cercle et celle du carré, soit $\pi/4$. Evidemment, si on veut trouver π avec une bonne précision, il faudra lancer tout plein de fléchettes (ou la même fléchette que vous lancerez tout plein de fois). Avec 10^3 lancers, on tombera sur π avec 3 décimales, avec 10^4 lancers, on captera π avec 4 décimales, etc.



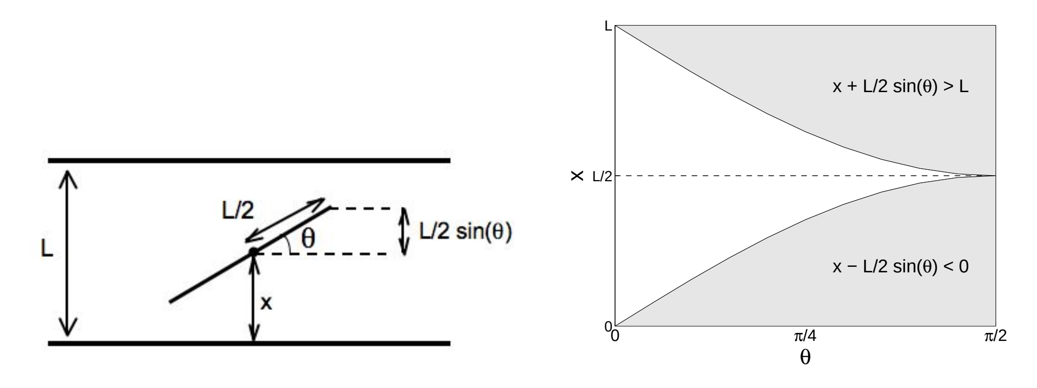
Dans le même genre d'idée on peut aussi tenter l'expérience des aiguilles de Buffon (que l'on doit à Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon). Il s'agit de lancer d'un coup une floppée d'aiguilles identiques sur un parquet composé de planches parallèles de même largeur, égale à la longueur de l'aiguille. On comptabilise alors le nombre d'aiguilles qui tombent à cheval sur une rainure du parquet, que l'on quotiente avec le nombre total d'aiguilles. Au plus qu'il y a d'aiguilles, au plus que ce rapport se rapproche de $2/\pi$. Mais pourquoi ?



Un petit dessin, c'est bien, mais une démonstration c'est mieux. Nous choisissons donc la démo. Comme bonne-maman s'écrie : "Quoi, tu n'aimes pas le dessin", agrémentons, pour lui faire plaisir, notre démo de quelques croquis craquants.

Nous allons donc calculer la probabilité qu'une aiguille coupe une rainure du parquet (en faisant l'hypothèse qu'aucune aiguille ne s'y plante à la verticale, ce qui aurait pour effet de fausser le résulat et d'abîmer le parquet).

Faisons tout d'abord connaissance avec les variables de Buffon (croquis de gauche) : L est la longueur d'une aiguille, égale à l'écart entre deux rainures du parquet ; x est la distance entre une rainure du parquet et le centre de l'aiguille ; et θ l'angle de l'aiguille par rapport aux rainures du parquet. On a $0 \leq x \leq L$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$.



La distance "verticale" entre le centre de l'aiguille et son extrémité est de $L/2 \sin\theta$. L'aiguille coupera donc la rainure du haut si $x + L/2 \sin\theta \geq L$ et elle coupera la rainure du bas si $x - L/2 \sin\theta \leq 0$. Dans le croquis de droite, nous avons colorié en gris le domaine pour lequel l'une ou l'autre de ces relations est vérifiée dans un plan (θ, x) :

Puisque la distribution de probabilité de x sur l'intervalle $[0, L]$ et de θ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ est uniforme (c'est-à-dire que toute position du centre de l'aiguille et toute orientation de l'aiguille sont équiprobables), on peut en conclure que la probabilité que l'aiguille coupe une des rainures est donné par le rapport entre l'aire de la surface grisée et l'aire du rectangle $[0, \pi/2] \times [0, L]$. L'aire du rectangle est $A_{rectangle} = L \times \pi/2$. L'aire de la surface grisée est :

$$A_{gris} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{L}{2} \sin\theta d\theta = L[-\cos\theta]_0^{\pi/2} = L \tag{46}$$

Donc la probabilité que l'aiguille coupe une des rainures est

$$\frac{A_{gris}}{A_{rectangle}} = \frac{L}{L\pi/2} = \frac{2}{\pi} \tag{47}$$

Pour contrer les grincheux qui objecterons qu'on se trouve rarement avec un paquet d'aiguilles sur un parquet constitué de planches de même largeur que la longueur des aiguilles, on peut aisément généraliser ce résultat : pour des aiguilles de longueur a et un parquet dont les rainures sont espacées de b (avec $a \leq b$), la proportion d'aiguilles à cheval est $2a/(\pi b)$.

Nous vous dévoilons ici le mode d'emploi de construction de π en fractions de fractions de fractions de fractions de fractions de fractions de ..., plus courtement appelées fractions continues.

Matériel nécéssaire et suffisant :
- π avec tout plein de décimales
- une collection entière de nombres entiers
- un kit de barres de fraction de toutes tailles.

Mode opératoire :

1. extraire soigneusement le premier "3" du π et le placer devant une barre de fraction
2. déposer délicatement un 1 au-dessus de la barre de fraction.
3. inverser méticuleusement la partie restante de π.
4. extraire précisément l'entier localisé devant la virgule du nombre obtenu en (3), le placer devant une barre de fraction, mettez consciencieusement un "1" au dessus de cette barre, et disposer le tout en dessous de la barre de fraction déjà installée.
5. inverser minutieusement la partie restante du nombre restant
6. refaire inlassablement les étapes 4 et 5.

Après quelques itérations, vous devriez obtenir le début de la cascade fractionnaire :

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{14 + ...}}}}}}}}}}}} \quad (48)$$

Un autre formulation, due à Brouncker, permet d'obtenir une cascade de fractions régulières :

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \cfrac{11^2}{2 + ...}}}}}}} \quad (49)$$

Visiblement, π n'a jamais cessé de fasciner les matheux, depuis Archimède jusqu'à Schpotzermann & Wienerschnitzel. Le nombre de formules permettant de cerner les décimales piennes est tout simplement décapsulant. Les démontrer toutes serait fastidieusement laborieux et ferait exploser le nombre de pages de cet ouvrage et la tête du lecteur. Quoi qu'en dise bonne-maman, nous nous contenterons de vous balancer ici en vrac quelques formules plus décoiffantes les unes que les autres :

- *Produit de Wallis* :
  Le produit de Wallis a été produit par Wallis en sèzcensinkantsinc. On vous l'a reproduit ici :

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k)^2 - 1} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2}{1} . \frac{2}{3} . \frac{4}{3} . \frac{4}{5} . \frac{6}{5} . \frac{6}{7} .... \tag{50}$$

  Notez que le grand π n'a absolument strictement rien à voir avec le petit π.

- *Problème de Bâle*
  Posé en 1644 par Mengoli, né en 1626 à Bologne et mort en 1686 à Bologne, le problème de Bâle a été résolu en 1735 par Euler, né en 1707 à Bâle et mort en 1783 à Saint-Pétersbourg et inspirera plus tard Riemann, né en 1826 à Breselenz et mort en 1866 à Selasca, à environ 314 km de Bâle. Le problème bâlois consistait simplement à calculer la somme des carrés des inverses des naturels :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... = \frac{\pi^2}{6} \tag{51}$$

- *Formule alambiquée de Ramanujan*
  Srinivasa Aiyangar Ramanujan est un mathématicien indien (du début du XXème siècle), né en Inde et mort en Inde et connu pour avoir pondu, en Inde, une floppée de formules mathématiques plus abracadabrantes les unes que les autres, dont un bon nombre sont liées à π. Voici une de ses productions délirantes :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}} \tag{52}$$

  Le point d'exclamation n'est pas un point d'exclamation mais une factorielle. Cette formule serait arrivée dans la tête de l'indien pendant un rêve (à moins que ce ne fût un cauchemar). La frappitude de la formule réside non seulement dans les nombres quelque peu exotiques[14] qui la décorent mais aussi dans le fait que les premiers termes de la série produisent déjà un grand nombre de décimales correctes.

[14] Un nombre exotique est un nombre qu'on n'a pas l'habitude de voir dans des formules mathématiques, comme 9801 ou 26390. En revanche, π n'est pas un nombre exotique.

Si on prend seulement le premier terme, $k = 0$, on en déduit, après un processus d'inversion :

$$\pi = \frac{9801}{2 \times 1103\sqrt{2}} = 3,14159273001...!$$

Et ici le point d'exclamation est un point d'exclamation ! Il est en effet époustoufflant de constater que ce premier terme de la série contient déjà 6 décimales correctes.

- *Formules des frères Chudnovsky* :
  En 1987, les brothers Chudnovsky ont sorti d'un chapeau russe une formule encore plus crazy que celle de Ramanujan, dans le sens où les numbers qui y apparaissent sont encore more exotiques :

$$\frac{426880\sqrt{10005}}{\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3 (640320)^{3k}} \tag{53}$$

  Cette crazy formule livre 14 new décimales de π à chaque terme ajouté. A la fin des eigthies, les brothers ont C++er cette formule dans un computer, qui a computationné des giga et des giga de digits, et ils ont ainsi cassé le record de digits de π computées.

- *Formule de François Viète*
  Petit flashback. Né en 1540, François Viète, qui était français et non viet, a trouvé une formule avec tout plein de racines et où n'apparaît que le chiffre 2 :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}.... \tag{54}$$

- *Formule d'emboîtement de racines de 2*
  Un réarrangement des racines, des 2s et une tendance vers l'infinie limite nous conduit gentiment à :

$$\pi = \lim_{k\to\infty} \left(2^k \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...\sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}} \right) \tag{55}$$

  où k est le nombre de racines carrées emboîtées

- *Variante d'la Greg's formule*

Une variante d'la Greg's formule se présente comme une supersérie à deux zindices. Supposons que p_{ij} soit l'élément i, j d'un tableau. Définissons alors la première ligne $(i = 0)$ par

$$p_{0,j} = \sum_{k=1}^{j} \frac{4(-1)^{k+1}}{2k-1} \tag{56}$$

ou, de manière équivalente mais plus jolie :

$$p_{0,j} = p_{0,j-1} + \frac{4(-1)^{j+1}}{2j-1} \text{pour } j \geq 1 \tag{57}$$

avec $p_{0,0} = 4$.
Cette récurrence débite les valeurs de la première ligne du tableau :

$$\begin{aligned} p_{0,1} &= \frac{4}{1} \\ p_{0,2} &= \frac{4}{1} - \frac{4}{3} \\ p_{0,3} &= \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} \\ &\ldots \end{aligned}$$

On définit alors les autres termes par un autre récurration :

$$p_{i,j} = \frac{p_{i-1,j} + p_{i-1,j+1}}{2} \tag{58}$$

Illustrons cette super-série bi-indicée à l'aide du tableau bi-dimensionnel monochrome ci-dessous. On installe confortablement 4 dans la première case. Ensuite, les autres éléments de la première ligne se calculent avec (57) en ajoutant bêtement un terme à la valeur de la case précédente. Pour les lignes suivantes, c'est à peine moins simple. Pour chaque case à partir de la diagonale des $p_{i,i}$, on remplit en moyennant les deux cases de la ligne du dessus comme l'explique si bien la formule (58). On constate alors que les valeurs sur la diagonale convergent vers π :

$$\lim_{k \to \infty} p_{kk} = \pi$$

Il est possible mais non nécessaire de remplir les cases hachurées sous la diagonale. Vu la non-nécéssairité de cette opération, on s'abstiendra. Il est en revanche impossible mais nécéssaire de remplir les cases vides restantes au dessus de la diagonale. Impossible car il faudrait tout d'abord calculer les termes supplémentaires sur la première ligne. Or ce n'est pas prévu dans notre tableau. Il est toutefois nécéssaire de les calculer pour avancer sur la diagonale et se rapporcher de π. Nous laissons au lecteur calculateur le plaisir d'agrandir et de compléter notre remarquable tableau. Il pourra ainsi vérifier que :

$$p_{10,10} = 3.141592653$$

j \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	**4,0000**	2,6667	3,4667	2,8952	3,3397	2,9760	3,2837	3,0171	3,2524	3,0418	3,2323
1		**3,0667**	3,1810	3,1175	3,1579	3,1299	3,1504	3,1347	3,1471	3,1371	
2			**3,1492**	3,1377	3,1439	3,1401	3,1426	3,1409	3,1421		
3				**3,1408**	3,1420	3,1414	3,1417	3,1415			
4					**3,1417**	3,1415	3,1416				
5						**3,1416**					
6							...				
7								...			
8									...		

- *Récurrence tarabisquotée de Salamin & Brent*

  En 1975, alors que Sir John Warcup Kappa Cornforth recevait le prix Nobel de Chimie pour son travail sur la stœchiométrie des réactions enzymatiques, Salamin & Brent ont avancé une quadruple récurrence tarabisquotée basée sur la moyenne arithmético-géométrique qui converge indéniablement vers π.

  On prend comme valeurs initiales :

$$a_0 = 1, b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, t_0 = \frac{1}{4} \text{ et } p_0 = 1$$

  et on récurre de la manière suivante :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \\ t_{n+1} &= t_n - p_n \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 \\ p_{n+1} &= 2p_n \end{aligned} \tag{59}$$

  Encore un fois, ça ne saute pas du tout aux yeux mais le duo a prouvé que, indubitablement :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_n + b_n)^2}{4t_n} = \pi \tag{60}$$

- *Approximation de Schpotzermann & Wienerschnitzel*

  Assomés par les formules et récurrences plus tordues les unes que les autres, Schpotzermann & Wienerschnitzel introduiront en 2024 leur propre formule d'approximation de π qui vaut ce qu'elle vaut :

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,14626... \approx \pi \tag{61}$$

Quel genre de personnage est π ? Examinons son caractère de plus près. Comme il se plaît à trainer derrière sa virgule une ribambelle de chiffres, il n'est pas très entier. Mais il est loin d'être négatif, car aucun trait ne le signale. Ce n'est toutefois pas quelqu'un de très complexe, vu que sa partie imaginaire fait défaut. Pourtant, malgré son manque d'imaginaire, il n'est pas du tout rationnel. Il serait même complètement irrationnel. Et malgré tout ça, il est entièrement planté dans le réel. Voilà un caractère bien perturbé nous direz-vous.

Depuis qu'il existe, on a pourtant cherché à lui trouver quelque chose de rationnel, en espérant mettre à jour une fraction qui s'accorderait à sa nature capricieuse. Il y eu quelques belles tentatives avec 22/7, 256/81, 339/108, etc, mais rien n'y fit, que nenni, π finit toujours par paraître en désaccord au plus profond de ses décimales. C'est le grand psychamathémaliste Johann Heinrich Lambert qui diagnostiqua l'irrationalitude de π dans un rapport accablant, mais tout ce qu'il y a de plus rationnel. Il recourut du développement en fractions continues de $\tan(a/b)$, un psychotest en vogue à l'époque :

$$\tan\frac{a}{b} = \cfrac{a}{b - \cfrac{a^2}{3b - \cfrac{a^2}{5b - \cfrac{a^2}{7b - \ldots}}}} \tag{62}$$

et savait que lorsque a et b sont des entiers non nuls, ce procédé produit toujours un irrationnel. Or, introduisant respectivement π et 4 dans sa machine, en lieu et place de a et b, il obtint $\tan(\pi/4) = 1$, qui est lui tout à fait rationnel. Sa déduction fut implacable, de π ou de 4, un des deux devait être irrationnel. Comme 4 fut lavé de tout soupçon, sa conclusion ne se fit pas attendre : l'irrationalitude de π était prouvée, et fit dès le lendemain la une de la presse π-pel de l'époque.

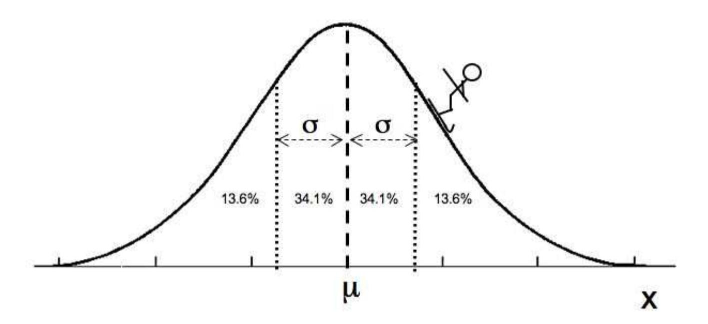
Comme si les psys de tous poils ne s'étaient pas assez acharnés sur ce pauvre π, un certain Charles Hermite se plut, en 1873, de rapporter qu'il le pensait doté de pouvoir transcendantal, sur la simple base que π se refusait d'annuler tout polynôme à coefficients rationnels, quel qu'il soit. Sa preuve s'appuyait sur une carte postale de Lindemann, qui mentionnait qu'il passait d'excellentes vacances en Autriche, que le dîner de l'hôtel était très bon, et aussi que si x était algébrique, alors e^x était automatiquement transcandent. Hermite, ayant appris à l'école que $e^{i\pi} = -1$, valeur qui ne transcende point, en conclut bien vite que π ne pouvait être qu'algébrique, entraînant sa transcendantalitude.

Heureusement, notre époque moins suspicieuse tente de réhabiliter π en essayant de prouver qu'il est parfaitement normal, c'est-à-dire que tout n-uple de chiffres apparaît dans ses décimales avec la même fréquence, et cela dans toute base. Trouverait-on par exemple, dans les décimales de π, 27 (trois au cube) ? 1640 (code postal de Rhode-Saint-Genèse) ? 1995 (année où Plouffe a découvert la formule de Plouffe) ? 3562951413 (10 premiers chiffres de π à l'envers) ? Y trouve-t-on aussi votre numéro de téléphone (même si vous avez payé pour avoir un numéro privé) ? Il est bien probable que oui. Et donc rien n'est plus normal que π !

- *Distribution normale*
  En stat, la distribution normale, presque aussi connue sous le nom de distribution de Gauss, est la distribution utilisée quand on ne sait pas quelle autre distribution choisir. C'est une distribution symétrique de moyenne μ et d'écart-type σ. Gauss a montré que son équation est

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{63}$$

  où π apparaît caché sous une racine avec son copain 2.



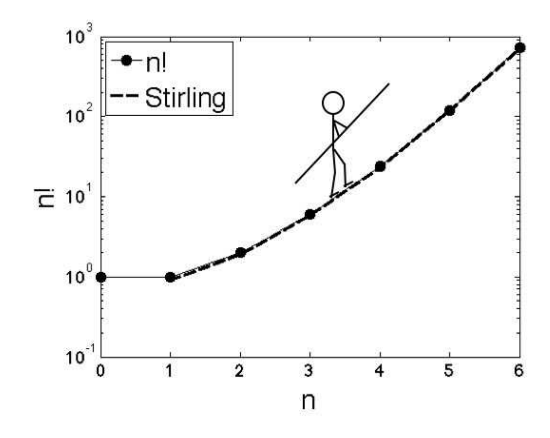
- *Formule de Stirling*
  Les factorielles, qui apparaissent en analyse combinatoire, s'exclament comme ceci :

$$n! = n(n-1)(n-2)...1 \tag{64}$$

  D'apparence anodine, elles sont cependant horriblement horribles à calculer car lorsque n grandit, $n!$ devient affreusement gigantesque. Stirling a trouvé la formule de Stirling qui donne une époustouflante approximation de $n!$ en termes de e et π :

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{65}$$

  La remarquabilité de (65) peut être admirée sur la figure figurant ci-dessous :



EπLOGUE

Voilà c'est fini. Snif !

Il ne vous reste maintenant plus qu'à écouter le CD aérien de Kate Bush (en particulier la 2ème plage du disque, disque qui, rappelons-le, a un rapport perimètre sur diamètre égal à π).

Nous vous invitons aussi à lire le beau poème tapé ci-dessous et à compter le nombre de lettres de chaque mot...

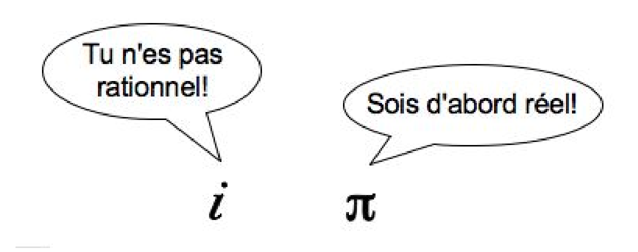
Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !
Immortel Archimède, artiste, ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Jadis, mystérieux, un problème bloquait
Tout l'admirable procédé, l'œuvre grandiose
Que Pythagore découvrit aux anciens Grecs.
O quadrature ! Vieux tourment du philosophe.

Insoluble rondeur, trop longtemps vous avez
Défié Pythagore et ses imitateurs.
Comment intégrer l'espace plan circulaire ?
Former un triangle auquel il équivaudra ?

Nouvelle invention : Archimède inscrira
Dedans un hexagone ; appréciera son aire
Fonction du rayon. Pas trop ne s'y tiendra :
Dédoublera chaque élément antérieur ;

Toujours de l'orbe calculée approchera ;
Définira limite ; enfin, l'arc, le limiteur
De cet inquiétant cercle, ennemi trop rebelle
Professeur, enseignez son problème avec zèle.



Bibliographie

1. Archimède, *De la mesure du cercle*, bibliothèque de Syracuse, Grèce, vers 250 avant J.-C. Texte traduité, retappé, commenté, et rendupubliqué ici :
   http ://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/cercle.htm
2. Johann Heinrich Lambert (1761) “Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques”, dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, XVII, pp. 265-322.
3. Picolopoulos, “Histoire de la Grèce antique”, Ed. Piketou, 1994.
4. Bailey, Borwein et Plouffe, “On the rapid computation of various polylogarithmic constants”, dans *Mathematics of Computation*, 1997.
5. Lange LJ (1999) “An elegant continued fraction for π”, *The American Mathematical Monthly* 106, pp. 456-458.

Internetographie

1. Wikipedia : http ://fr.wikipedia.org/wiki/Pi
2. Wolfram : http ://mathworld.wolfram.com/Pi.html
3. Binary π : http ://www.befria.nu/elias/pi/binpi.html
   Nous vous recommandons chaudement ce site ; un magazine allemand l'a classé en 4ème position des sites www les plus inutiles.
4. L'univers de π : http ://www.pi314.net/fr/
5. Tablette babylonienne : http ://numberwarrior.wordpress.com/2008/12/03/

Discographie

1. You tube : A lecture on π : http ://www.youtube.com/watch ?v=Lc-_t9aYFuQ
2. You tube : Kate Bush (π) : http ://www.youtube.com/watch ?v=kZSHr5E7fZY
3. You tube : The π melody : http ://www.youtube.com/watch ?v=bLM3o5z5md4